UNITECH 2022 GABROVO

INTERNATIONAL SCIENTIFIC CONFERENCE
18-19 November 2022, GABROVO

ПРИЛОЖЕНИЕ НА WOLFRAM MATHEMATICA В ОБУЧЕНИЕТО ПО ТЕМАТА „ЕКСТРЕМУМ НА ФУНКЦИЯ НА ДВЕ ПРОМЕНЛИВИ“

Валентина Тодорова-Лазарова[1], Пенка Иванова[2]

[1]ТУ-Габрово
[2]ТУ-Габрово

APPLICATION OF WOLFRAM MATHEMATICA IN THE TEACHING PROCESS CONCERNING THE TOPIC “EXTREMA OF FUNCTIONS IN TWO VARIABLES”

Valentina Todorova-Lazarova[1], Penka Ivanova[2]

[1] TU-Gabrovo
[2] TU-Gabrovo

Abstract

In this paper the development of educational content on the topic "Extrema of a function of two variables" is proposed. A mathematical method is applied to find the stationary points and local extrema. The sequence of mathematical operations is implemented by means of Wolfram Mathematica system.

Keywords: functions in two variables, extrema, computer algebra system.

ВЪВЕДЕНИЕ

Човешкият капитал е един от производствените фактори и определя икономическия растеж [1]. Образованието е един от начините за неговото увеличаване.

Във време, когато технологичните иновации се откриват в почти всяка част в нашето ежедневие, е необходимо да се развие научно и технически грамотно общество. Поддържането на днешното ниво на развитие на науката и технологиите се основава на съвременните инженери.

Математиката като самостоятелна дисциплина е в основата на научните дисциплини. Тя е езикът на науката. Чрез символите еднозначно се изразяват идеи. Математиката предоставя инструмент в света на изследователската работа, обработването и анализирането на данни, съставяне на модели. Качественото образование по математика е възможност да се влезе в света на науката и технологиите [2,3].

Математиката е начин на мислене, основан на абстракция. Абстрактният характер на математическите знания (понятия) изисква онагледяване. За тази цел се използват системи за компютърна алгебра (СКА) и графични калкулатори, които са продукт на съвременния дигитален свят. Към днешна дата СКА са интегрирани в университетското образование и са инструмент за обучение по математика. Автономността и независимостта в университетите им дава свободата да избират измежду многото налични СКА [4].

ИЗЛОЖЕНИЕ

Математика отразява следните два етапа на решаване на задача – мислене върху проблема и след това манипулиране на символи според правилата. Формално, математиката се състои от последователни правила за изчисления. Този възглед за математиката, като действия със символи, лежи в основата на изчисленията. Съществуващите системи за компютърна алгебра, които се използват във втората фаза - манипулиране със символи, предоставят незабавна обратна връзка за верността на знанията и решаването на задачата. Също така, облекчават изчисленията на ръка и по този начин се дава възможност на студентите да се концентрират върху осмисляне и решаване на по-сложни идеи и задачи.

В Технически университет - Габрово, СКА са интегирани в курса по „Висша математика-2 част“, както и в курса по „Приложна математика“, с използването на Wolfram Mathematica и в частност Wolfram Cloud.

Wolfram Mathematica е универсална система за научно-технически пресмятания с разбираем интерфейс, с визуализирана и подобрена среда за работа, улесняваща до максимална степен дейността на всеки студент.

Системата Wolfram Mathematica работи с всички компютърни операционни системи и позволява да се обменят данни в много стандартни формати. Тя се състои от две части - Ядро (Kernel) и Интерфейс (Front End).

Използването на системата помага за по-бързо и конкретно решаване на математически проблеми, като запазва условията, решенията и визуализациите в един документ (Notebook). С помощта на хипервръзки може да се пренасочва както в една тетрадка, така и между различни такива.

Wolfram Mathematica позволява документът да бъде структуриран на секции, както и да бъдат въвеждани на текстови полета. Това дава добра възможност за изготвяне на електронни методични материали.

Осъществява се споделяне и изчисления в уникална хибридна облачна-десктоп среда чрез присъединяването на Wolfram Mathematica с облачно пространство [8].

В своята статия "Multivariable calculus with understanding and how to assess it" Daniela Velichova разглежда темата за функция на няколко променливи, като представя резултати относно глобален и локален екстремум и прилага СКА за построяване на графика [5]. Ungsana Chundang използва СКА също за визуализации на градиент и графика на функция на няколко променливи [6]. Herrero Debón, в статията “Absolute extrema of two variables functions” дава резултати от изследване за абсолютен екстремум, направени „на ръка“ и прилага СКА при определяне на дефиниционна област и графика на функция на две променливи [7].

В направения обзор по темата “Екстремум на функция на две променливи” се показва основно графика на функция на две променливи и не се описва алгоритъмът за изчисление.

Обучението по математика чрез използване на компютърни системи има следните целеви насоки:

1. задълбочаване познанията на студентите по съответната математическа дисциплина;
2. акуратна работа с математически софтуер;
3. правилна интерпретация на компютърните резултати.

В настоящата статия се представя решение на задача, блок-схема (фиг.1) и програма за намиране на локален екстремум.

Задача: Да се изследва за локален екстремум функцията:

$$f(x,y) = y^3 + 4xy + 2x^2y + 4.$$

1. Решение.

Намиране на първите частни производни:

$$f_x = 4y + 4xy = 4y(1+x);$$
$$f_y = 3y^2 + 4x + 2x^2.$$

Определяне на стационарните точки като се реши системата:

$$\begin{cases} 4y(1+x) = 0 \\ 3y^2 + 4x + 2x^2 = 0. \end{cases}$$

Получава се, че функцията има четири стационарни точки: $\mathrm{M}_1(0,0)$. $\mathrm{M}_2(-2,0)$, $\mathrm{M}_3\left(-1,-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, $\mathrm{M}_4\left(-1,\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

Пресмятат се вторите частни производни:

$$f_{xx} = 4y, f_{xy} = f_{yx} = 4 + 4x, f_{yy} = 6y.$$

За детерминантата на Хесе се получава:

$$\Delta = 24y^2 - 16(1+x)^2.$$

За точката $\mathrm{M}_1(0,0)$: $\Delta = -16 < 0 \Longrightarrow$ в т. M_1 функцията няма локален екстремум: $f_{sad}(0,0) = 4$.

За точката $\mathrm{M}_2(-2,0)$: $\Delta < 0 \Longrightarrow$ в т. M_2 функцията няма екстремум: $f_{sad}(-2,0) = 4$.

За точката $\mathrm{M}_3\left(-1,-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$: $\Delta = 16 > 0 \Rightarrow$ в т. M_3 функцията има екстремум и от

$f_{xx}(\mathrm{M}_3) = -4\sqrt{\frac{2}{3}} < 0 \Longrightarrow$ екстремумът е локален максимум:

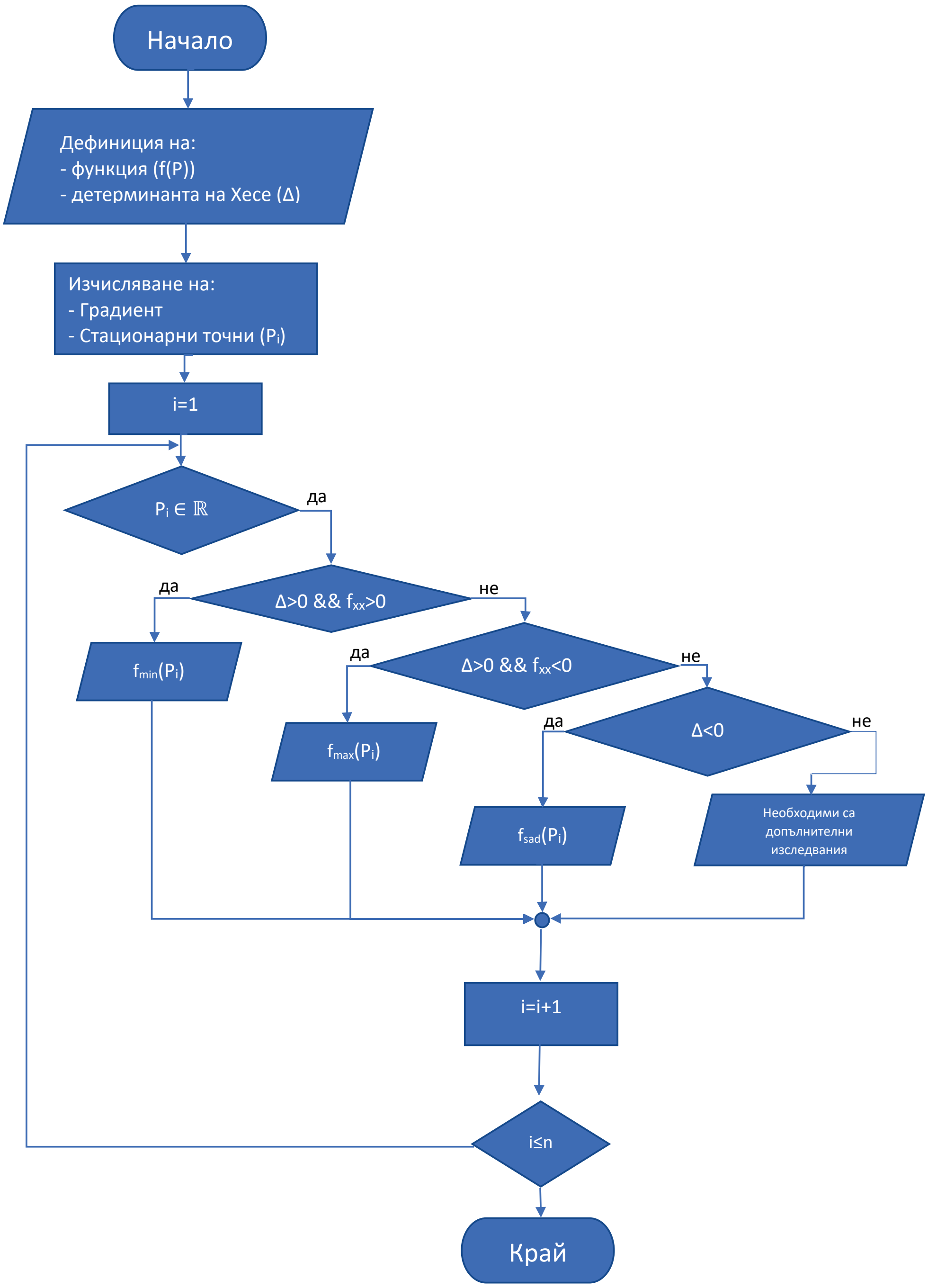
$$f_{max}\left(-1, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{4}{9}(9+\sqrt{6}).$$

За точката $\mathrm{M}_4\left(-1, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$: $\Delta = 16 > 0 \Longrightarrow$ в тази точка функцията има екстремум и от

$f_{xx}(\mathrm{M}_4) = 4\sqrt{\frac{2}{3}} > 0 \Longrightarrow$ в т. M_4 екстремумът е локален минимум:

$$f_{min}\left(-1, \sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{4}{9}(9-\sqrt{6}).$$

2. Блок-схема



***Фиг. 1**. Блок-схема на програма за намиране на екстремум на функция на две променливи*

3. Програма

```
Clear[f,Δ,H, x,y];
(* Дефиниция на функцията f(p) *)
f[x_,y_]:=y^3+4x*y+2*x^2*y+4;
(* За градиента използваме вградена функция
 Grad[f[x,y],{x,y}] *)
Print["▽f=",Simplify[Grad[f[x,y],{x,y}]]];
(* Дефиниция на Хесиана *)
H[f_]:={{D[f[x,y],x,x],D[f[x,y],x,y]},
{D[f[x,y],y,x],D[f[x,y],y,y]}};
(* Операторът Evaluate показва,
че трябва да се премине към
променливи x и y. *)
Hess[x_,y_]:=Evaluate[H[f]];
Δ[x_,y_]:=Evaluate[Det[H[f]]];
(* Определяне на стационарните точки *)
Solutions=Solve[Grad[f[x,y],{x,y}]=={0,0},{x,y}];
(* n е броя на решенията. *)
n=Dimensions[Solutions][[1]];
(* Дефинираме множество от точки *)
Points=Table[{0,0},{i,1,n}];
Print["Стационарни точки"];
(* Оператор /. служи за подмяна на неизвестните с
 техните стойности. Чете се ReplaceAll *)
For[i=1,i<=n,i++,
  Points[[i]]={x ,y}/.Solutions[[i]];
  {xi,yi}=Points[[i]];
  (* Изключване на точките с комплексни координати *)
  If[Abs[Im[xi]]+Abs[Im[yi]]==0 ,
   Print["P",i,"=",Points[[i]]]]
  ];
Print["Hf=",MatrixForm[Simplify[H[f]]]];
Print["Δ(P)=",Simplify[Δ[x,y]]];
(* Изследване на поведението на функцията в стационарните точки *)
For[i=1,i<=n,i++,
  (* Избор на конкретна точка Pi *)
  {xi,yi}=Points[[i]];
  (* Проверка дали Pi(xi,yi) е точка с реални координати *)
  If[Abs[Im[xi]]+Abs[Im[yi]]==0 ,
   (* Проверка дали Pi(xi,yi) е точка, в която f(P) има минимум *)
  If[And[Δ[xi,yi]>0,Hess[xi,yi][[1,1]]>0],
    Print["fmin[P",i,"]=",f[xi,yi]]];
  (* Проверка дали Pi(xi,yi) е точка, в която f(P) има максимум *)
  If[And[Δ[xi,yi]>0,Hess[xi,yi][[1,1]]<0],
    Print["fmax[P",i,"]=",f[xi,yi]]];
  (* Проверка дали точката Pi(xi,yi) е седлова *)
  If[Δ[xi,yi]<0, Print["fsad[P",i,"]=",f[xi,yi]]];
  (* Ако Δ(Pi)=0 не можем да направим заключение *)
  If[Δ[xi,yi]==0,
   Print["f?[P",i,"]=",f[xi,yi]]]]
 ];
(* Начертаване на графиката на z=f(P) *)
Plot3D[f[x,y],{x,-5,1},{y,-2, 2},
 AxesLabel->{x,y,"f(P)"},
 BoxRatios->{1,1,1},
 AxesStyle->Directive[Red,Italic,18]]
```

∇ f $= \{4(1+x)y, 4x+2x^2+3y^2$

Стационарни точки

$P1 = \{-2,0\}$

$P2 = \{-1, -\sqrt{\frac{2}{3}}\}$

$P3 = \{-1, \sqrt{\frac{2}{3}}\}$

$P4 = \{0,0\}$

$$\mathrm{Hf} = \begin{pmatrix} 4y & 4(1+x) \\ 4(1+x) & 6y \end{pmatrix}$$

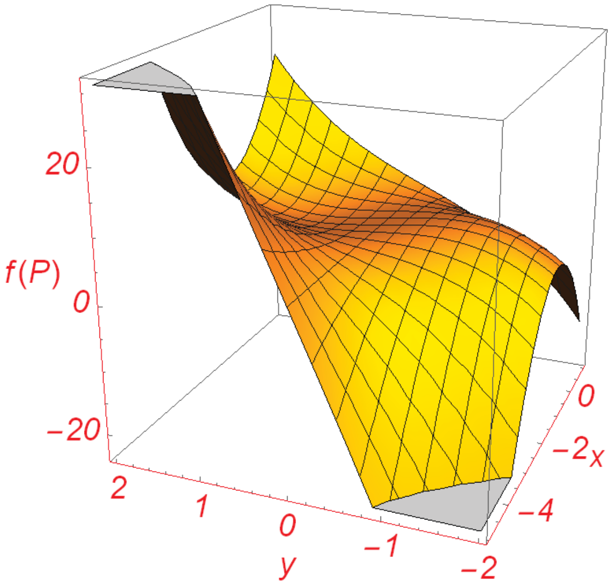
$\Delta(P) = -8(2+4x+2x^2-3y^2)$

$f_{sad}[P1] = 4$

$$f_{max}[P2] = 4 + \frac{4\sqrt{\frac{2}{3}}}{3}$$

$$f_{min}[P3] = 4 - \frac{4\sqrt{\frac{2}{3}}}{3}$$

$f_{sad}[P4] = 4$



***Фиг. 2**. Графика на функцията*

$$f(x, y) = y^3 + 4xy + 2x^2y + 4$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решението на дадената задача със система за компютърна математика е по-бързо за изпълнение, изключително конкретно и дава много добра визуализация чрез съответните команди и естествено се възприема с по-голям ентусиазъм от студентите в сравнение с чисто математическото решение. При решаване „на ръка" е необходимо да използваме математически методи за всяка нова функция, докато веднъж създадена програмата може да бъде приложена многократно, като е необходимо само въвеждане на съответната функция. Изучаването на математика с помощта на компютърни системи повишава активността на студентите в час и също така засилва тяхната мотивация за учене.

REFERENCE

[1] Robert E. Lucas, On the mechanics of economic development, Journal of Monetary Economics, Volume 22, Issue 1, 1988, Pages 3-42, ISSN 0304-3932,

[2] Vázquez, Juan Luis. "The importance of Mathematics in the development of Science and Technology." Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada 19 (2001): 69-112.

[3] Murphy, T. J., & Goodman, R., & Hofer, M., & White, J., & Black, E., & Kline, B. (1999, June), Using Mathematica With Multivariable Calculus Paper presented at 1999 Annual Conference, Charlotte, North Carolina.

[4] Artigue, M. Learning Mathematics in a CAS Environment: The Genesis of a Reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work. International Journal of Computers for Mathematical Learning 7, 245 (2002).

[5] Velichová, Daniela. "Multivariable calculus with understanding and how to assess it." Proc. of the 14th SEFI MWG seminar (eds. M. Demlova, D. Lawson), Loughborough. 2008.

[6] Chundang, Ungsana. "Using CAS for the visualization of some basic concepts in calculus of several variables." TCM Conference, Japan. 1998.

[7] Herrero Debón, Alicia. "Absolute extrema of two variables function." (2016). http://hdl.handle.net/10251/68276

[8] www.wolfram.com accessed 9/21/2022.