

## ПРОЕКТИРАНЕ НА СИНХРОНИЗАЦИОННА СХЕМА ЗА ДВЕ НЕИДЕНТИЧНИ ХАОТИЧНИ СИСТЕМИ

Драгомир Чантов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Технически университет - Габрово

## DESIGN OF SYNCHRONIZATION SCHEME FOR TWO NON-IDENTICAL CHAOTIC SYSTEMS

Dragomir Chantov<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Technical University of Gabrovo, Bulgaria

### Abstract

*In this paper an approach for the design of a chaotic synchronization scheme between two different chaotic systems is proposed. The aim is to control a chaotic system in such way that its dynamics to be changed so that it mimics the dynamics of a completely different chaotic master system. The control functions are designed according to the second Lyapunov stability law.*

**Keywords:** chaotic systems; chaotic synchronization; Lyapunov stability.

### ВЪВЕДЕНИЕ

След 1990 г. активно се развива една специфична област от теорията на управлението – решаване на задачи за стабилизация [1] или синхронизация на нелинейни хаотични системи [2,3]. Особена популярност добиват задачите за синхронизация, при които целта е синтезиране на връзка между две или повече хаотични системи по такъв начин, че динамиката им да бъде в определена зависимост. Актуалността на задачите за хаотична синхронизация се обуславя от факта, че това интересно явление намира приложение за защита на данните в най-различни комуникационни системи или системи за защита на информация [4-6].

Най-често при хаотичната синхронизация се разглеждат две еднопосочно свързани хаотични системи в конфигурация Master – Slave, като при това се търси такъв тип управление към втората система, че тя да извършва идентични хаотични колебания с първата система. Такъв тип синхронизация се нарича *идентична*. Възможно е да се синтезират други типове управление,

при които динамиката на Slave системата е в по-сложна функционална зависимост с тази на Master системата, при което се получава *мащабирана, изместена, осцилираща* синхронизация или *антисинхронизация*. При всички тези случаи Master и Slave системите са идентични.

В научната литература доста по-слабо застъпени са задачите за проектиране на синхронизационни схеми между неидентични хаотични системи.

В настоящия доклад се предлага синхронизационна схема между два различни непрекъснати хаотични модела от трети ред. На базата на прилагане на втория метод за устойчивост на Ляпунов се синтезира активно управление към едната система, което напълно подчинява динамиката ѝ към тази на другата система.

### ИЗЛОЖЕНИЕ

През последните години в научната литература са представени редица нови абстрактни хаотични модели, преобладаващо от трети ред и с непрекъсната динамика. Такъв е моделът на Wu-Li [7], който се опис-

ва с уравненията:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -ax_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3/a, \\ \dot{x}_3 &= cx_1^2 - ax_2 - bx_3 - d. \end{aligned} \quad (1)$$

За стойности на параметрите:

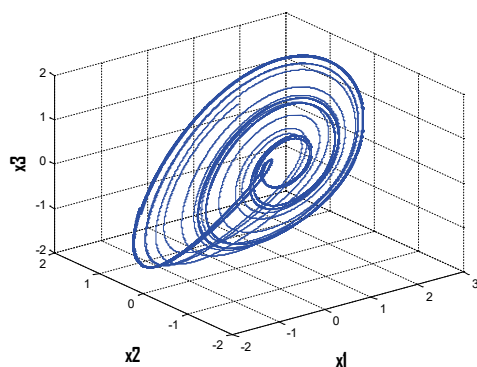
$$a = 1.2, b = 0.3, c = 0.3, d = 0.4 \quad (2)$$

и начални условия:

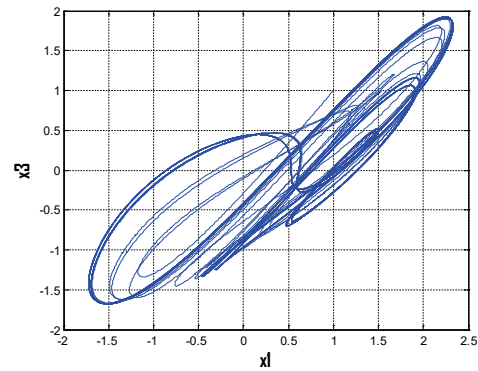
$$\mathbf{x}(0) = [x_1(0) \quad x_2(0) \quad x_3(0)]^T = [1 \quad 1 \quad 1]^T \quad (3)$$

динамиката на системата е хаотична.

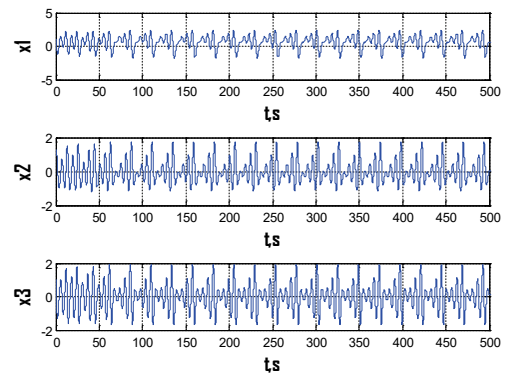
Хаотичният модел (1) е симулиран с помощта на програмния продукт Matlab за стойности на параметрите (2) и начални условия (3). На фиг. 1 е показано пространството на състоянието  $(x_1, x_2, x_3)$  на системата. Вижда се, че атракторът на системата е хаотичен, т.е. състои се от множество нагъсто разположени една до друга неустойчиви периодични орбити, ограничени във формата на специфична структура в определена подобласт от пространството на състоянието. За добиване на по-ясна представа за структурата на хаотичния атрактор могат да се наблюдават проекциите на тримерното пространство на състоянието в трите фазови равнини  $(x_1, x_2)$ ,  $(x_2, x_3)$  и  $(x_1, x_3)$ . На фиг. 2 е показана една от тези фазови равнини -  $(x_1, x_3)$ . На фиг. 3 са показани времеви характеристики на трите променливи на състоянието на модела на Wu-Li. Характерно за променливите на състоянието на всяка хаотична система е, че тяхната динамика видимо е неразличима от динамиката на променлива със случаен характер.



Фиг. 1. Хаотичен атрактор на модела на Wu-Li



Фиг. 2. Проекция на хаотичния атрактор на модела на Wu-Li в една от фазовите равнини



Фиг. 3. Времеви характеристики на променливите на модела на Wu-Li

Друг сравнително нов хаотичен модел от трети ред е моделът на Zhang-Li-Chang [8], описван с уравненията:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= -\tilde{a}\tilde{x}_1 + \tilde{b}\tilde{x}_2 - \tilde{x}_2\tilde{x}_3, \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \tilde{x}_1\tilde{x}_3, \\ \dot{\tilde{x}}_3 &= \tilde{x}_2^2 - \tilde{c}\tilde{x}_3 + \tilde{d}\tilde{x}_1^2. \end{aligned} \quad (4)$$

За стойности на параметрите:

$$\tilde{a} = 12, \tilde{b} = 25, \tilde{c} = 8, \tilde{d} = 0.5 \quad (5)$$

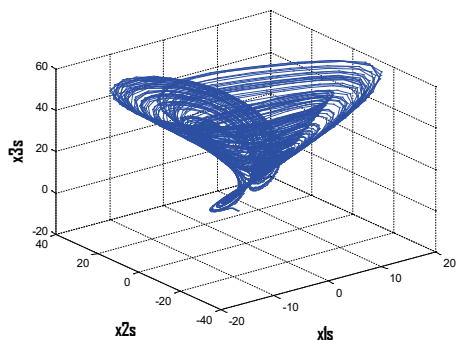
и начални условия:

$$\tilde{\mathbf{x}}(0) = [-1.8 \quad -1.5 \quad 2.5]^T \quad (6)$$

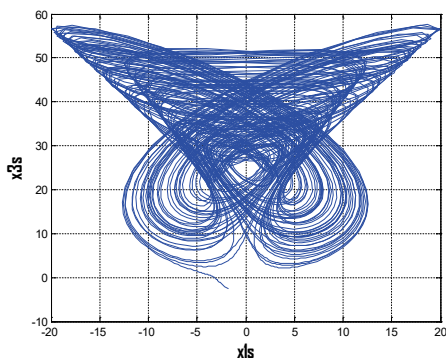
динамиката на системата е хаотична.

На фиг. 4 е показан хаотичният атрактор на системата (4) в пространството на състоянието  $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ . На всички графики променливите  $\tilde{x}_i$  са означени като  $x_i$ s поради особеностите на продукта Matlab. Атракторът отново има типичен хаотичен вид, като размерите му са с порядък по-го-

леми спрямо тези на атрактора на системата на Wu-Li от фиг. 1. На фиг. 5 е показана проекцията на хаотичния атрактор във фазовата равнина  $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_3)$ .

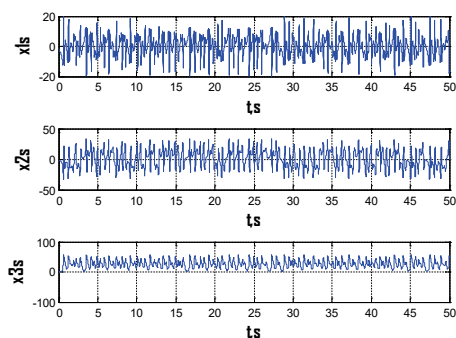


Фиг. 4. Хаотичен атрактор на модела на Zhang-Li-Chang



Фиг. 5. Проекция на хаотичния атрактор на модела на Zhang-Li-Chang в една от фазовите равнини

На фиг. 6 са показани времевите характеристики на трите променливи на състоянието на модела на Zhang-Li-Chang. При сравнение на тези характеристики със съответните на модела на Wu-Li от фиг. 3 се виждат различните времеви скали на динамиката на двете системи. Условно процесите в системата (4) се развиват с порядък по-бързо спрямо тези в системата (1).

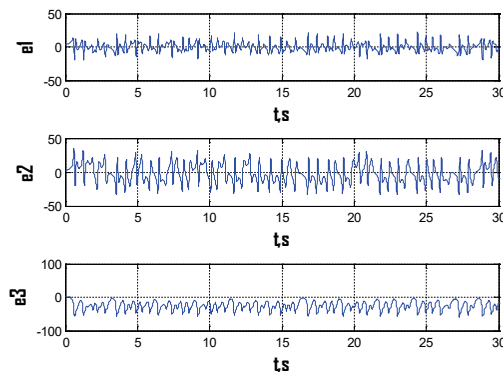


Фиг. 6. Времени характеристики на променливите на модела на Zhang-Li-Chang

Нека бъдат дефинирани функциите на разсъгласуване между отделните двойки променливи на системите на Wu-Li (1) и Zhang-Li-Chang (4):

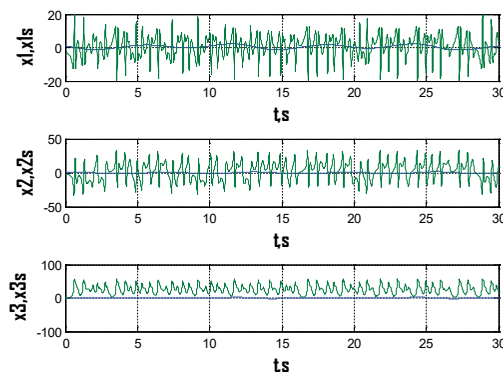
$$e_i = x_i - \tilde{x}_i, i = 1 \div 3. \quad (7)$$

Когато липсва връзка между системите (1) и (4) съответните функции (7) също имат хаотичен характер, както се вижда от фиг. 7.



Фиг. 7. Функции на разсъгласуване при липса на връзка между двете хаотични системи

На фиг. 8 е показана съвместната динамика на променливите  $(x_1, \tilde{x}_1)$ ,  $(x_2, \tilde{x}_2)$  и  $(x_3, \tilde{x}_3)$ . Забелязват се следните три особености: видимо липсва корелацията между динамиката на променливите на двете системи, различните времеви скали на динамиката на системите и голямата разлика в амплитудите на колебанията на системите на Wu-Li и Zhang-Li-Chang.



Фиг. 8. Съвместна динамика на отделните двойки променливи при липса на връзка

Идеята за синтез на синхронизационна схема между системите на Wu-Li (1) и

Zhang-Li-Chang (4) предполага еднопосочна връзка между системите, при която системата на Wu-Li да бъде в ролята на Master, или управляваща система, а системата на Zhang-Li-Chang – в ролята на Slave, или подчинена система. При това схемата може да се запише с уравненията:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -ax_2, \\ \text{MASTER } \dot{x}_2 &= x_3/a, \\ \dot{x}_3 &= cx_1^2 - ax_2 - bx_3 - d, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= -\tilde{a}\tilde{x}_1 + \tilde{b}\tilde{x}_2 - \tilde{x}_2\tilde{x}_3 + u_1, \\ \text{SLAVE } \dot{\tilde{x}}_2 &= \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \tilde{x}_1\tilde{x}_3 + u_2, \\ \dot{\tilde{x}}_3 &= \tilde{x}_2^2 - \tilde{c}\tilde{x}_3 + \tilde{d}\tilde{x}_1^2 + u_3, \end{aligned}$$

където  $u_i, i = 1 \div 3$  са управляващи функции към Slave системата, които трябва да се синтезират така, че

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_i(t) = 0, \quad i = 1 \div 3, \quad (9)$$

т.е. целта е да се постигне идентична хаотична синхронизация между двете различни хаотични системи в синхронизационната схема (8). По-конкретно съгласно избраната схема (8) целта е динамиката на системата на Zhang-Li-Chang да бъде подчинена на динамиката на системата на Wu-Li, ако бъдат намерени подходящи управляващи функции  $u_i$ .

Условието за идентична синхронизация (9) съответства на установяването на системата от разсъгласуването между Master и Slave системите в точката  $\mathbf{e} = [e_1 \ e_2 \ e_3]^T = \mathbf{0}$ . Ако точката  $\mathbf{e} = \mathbf{0}$  е устойчива, то между системите ще има синхронизация. Устойчивостта на т.  $\mathbf{e} = \mathbf{0}$  може да се изследва чрез дефиниране функция на Ляпунов  $V(\mathbf{e})$ . Съгласно втория метод за устойчивост на Ляпунов т.  $\mathbf{e} = \mathbf{0}$  е устойчива, ако бъде намерена такава функция на Ляпунов, за която да са изпълнени следните три условия:

$$V(\mathbf{e}) > 0, \quad \forall \mathbf{e} \neq 0, \quad (10)$$

$$V(\mathbf{e}) = 0, \quad \mathbf{e} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{dV(\mathbf{e})}{dt} < 0, \quad \forall \mathbf{e} \neq 0. \quad (12)$$

Обикновено при задачи за хаотична синхронизация функцията  $V(\mathbf{e})$  се избира във вид на квадратична функция на променливите на разсъгласуването (7):

$$V(\mathbf{e}) = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2), \quad (13)$$

за да отговаря на условията (10) и (11). След диференциране на израза (13) за първата производна на  $V(\mathbf{e})$  се получава:

$$\frac{dV(\mathbf{e})}{dt} = e_1\dot{e}_1 + e_2\dot{e}_2 + e_3\dot{e}_3. \quad (14)$$

За да бъде изразът (14) отрицателно дефиниран съгласно условието (12), той трябва да бъде приведен например във вида:

$$\frac{dV(\mathbf{e})}{dt} = -k_1e_1^2 - k_2e_2^2 - k_3e_3^2, \quad (15)$$

където  $k_i$  са положителни константи. Ако за първите производни на функциите на разсъгласуване се получат изразите:

$$\dot{e}_i = -k_i e_i, \quad i = 1 \div 3, \quad (16)$$

то изразът (14) ще добие вида (15) и така ще бъде изпълнено и третото условие (12) на втория метод за устойчивост на Ляпунов за разглежданата синхронизационна схема (8).

След диференциране на лявата и дясната част на уравнение (7), за производните на функциите на разсъгласуване  $\dot{e}_i$  се получава:

$$\dot{e}_i = \dot{x}_i - \dot{\tilde{x}}_i, \quad i = 1 \div 3. \quad (17)$$

От (17) следва, че изразите за  $\dot{e}_i$  могат да бъдат получени, като в схемата (8) се извадят уравненията на Slave системата от тези на Master системата:

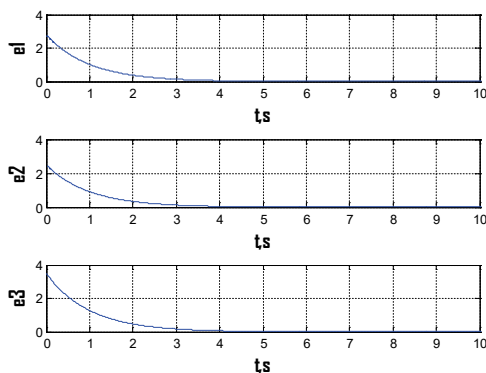
$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{\tilde{x}}_1 = -ax_2 + \tilde{a}\tilde{x}_1 - \tilde{b}\tilde{x}_2 + \tilde{x}_2\tilde{x}_3 - u_1, \\ \dot{e}_2 &= \dot{x}_2 - \dot{\tilde{x}}_2 = x_3/a - \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 - \tilde{x}_1\tilde{x}_3 - u_2, \\ \dot{e}_3 &= \dot{x}_3 - \dot{\tilde{x}}_3 = cx_1^2 - ax_2 - bx_3 - d - \\ &\quad - \tilde{x}_2^2 + \tilde{c}\tilde{x}_3 - \tilde{d}\tilde{x}_1^2 - u_3. \end{aligned} \quad (18)$$

За да бъдат приведени изразите (18) в необходимия за постигане на синхронизация вид (16), управляващите функции към Slave системата  $u_i$  трябва да се синтезират както следва:

$$\begin{aligned} u_1 &= -ax_2 + \tilde{a}\tilde{x}_1 - \tilde{b}\tilde{x}_2 + \tilde{x}_2\tilde{x}_3 + k_1(x_1 - \tilde{x}_1), \\ u_2 &= x_3/a - \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 - \tilde{x}_1\tilde{x}_3 + k_2(x_2 - \tilde{x}_2), \\ u_3 &= cx_1^2 - ax_2 - bx_3 - d - \\ &\quad - \tilde{x}_2^2 + \tilde{c}\tilde{x}_3 - \tilde{d}\tilde{x}_1^2 + k_3(x_3 - \tilde{x}_3). \end{aligned} \quad (19)$$

След заместване на управляващите функции (19) в изразите (18) и отчитане на (7), за първите производни на функциите на разсъгласуване в разглежданата хаотична синхронизационна схема (8) се получават изразите (16), което гарантира изпълнението и на третото условие на метода на Ляпунов. Изпълнението на трите условия (10), (11), (12) при така синтезираното управление доказва устойчивостта на проектираната синхронизационна схема.

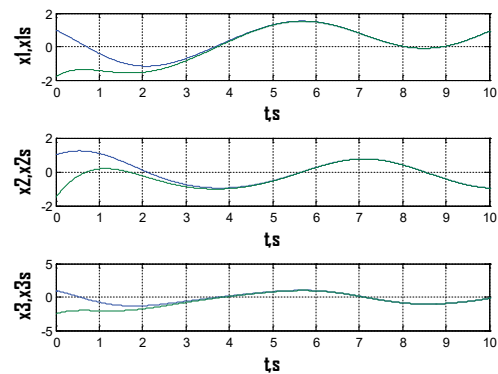
Синхронизационната схема (8) със синтезираните управляващи функции (19) е симулирана в среда на Matlab. Първоначално за константите  $k_i$  са избрани стойности  $k_i = 1, i = 1 \div 3$ . На фиг. 9 са показани получените при симулацията функции на разсъгласуване  $e_i = x_i - \tilde{x}_i, i = 1 \div 3$ . Вижда се, че след преходен процес от около 4s те се установяват в нула, т.е. двете хаотични системи се синхронизират идентично. При това Slave системата на Zhang-Li-Chang напълно променя своята динамика, която става идентична на тази на Master системата на Wu-Li. Уравненията на Slave системата са тези на модела на Zhang-Li-Chang, но с помощта на управленията към нея тя се държи като копие на системата на Wu-Li.



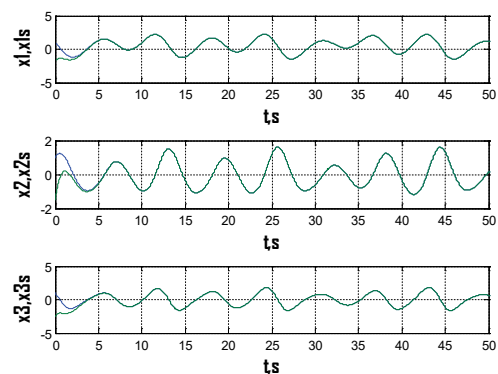
Фиг. 9. Функции на разсъгласуване при прилагане на управляващите функции

На фиг. 10 е показана съвместната динамика на двойките променливи  $x_1(t), \tilde{x}_1(t); x_2(t), \tilde{x}_2(t)$  и  $x_3(t), \tilde{x}_3(t)$ . След преходния процес динамиката на съответните двойки става идентична, но запазва хаотичния характер на променливите на системата на Wu-Li. На фиг. 11 са показани същите двойки променливи в по-голям времеви интервал, за да се види, че веднъж синхронизирани, системите остават в това състояние докато се поддържа управлението към Slave системата.

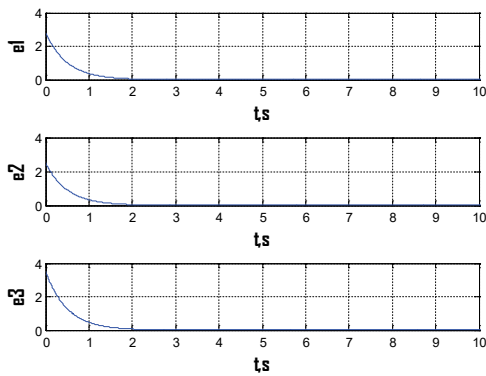
При експериментите е установено, че с помощта на константите  $k_i$  може да се регулира продължителността на преходния процес до достигане на синхронизация между системите. На фиг. 12 са показани функциите на разсъгласуване  $e_i = x_i - \tilde{x}_i$  за  $k_i = 2, i = 1 \div 3$ . Преходният процес е около 2s, т.е. два пъти по-кратък спрямо този от предходния експеримент.



Фиг. 10. Съвместна динамика на отделните двойки променливи при синхронизация



Фиг. 11. Съвместна динамика на отделните двойки променливи за по-голям времеви интервал



Фиг. 12. Функции на разсъгласуване при промяна на коефициентите  $k_i$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проектирана е хаотична синхронизационна схема, при която с помощта на прилагането на втория метод за устойчивост на Ляпунов е постигната синхронизация между две напълно различни непрекъснати хаотични системи от трети ред, с различни с порядък размери на хаотичните атрактори и различни с порядък времеви скали на тяхната динамика. След синтезиране и прилагане на управляващите функции към подчинената система, нейната динамика напълно се променя и става идентична на динамиката на управляващата хаотична система. Получените резултати са потвърдени със симулационни експерименти. Хаотичната синхронизационна схема може да се

използва като основа за реализиране на система за защитено предаване на данни или криптиране на информация.

## REFERENCE

- [1] Ott, E., C. Grebogi, J. Yorke. Controlling chaos. Physics Letters, vol.64, 1990, pp.1196-1199.
- [2] Carroll, T., L. Pecora. Synchronizing chaotic circuits. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I, Vol.38, No.4, 1991, pp.453-456.
- [3] Pecora, L., T. Carroll. Synchronization in chaotic systems. Physical Review Letters, Vol.64, No.8, 1990, pp.821-824.
- [4] Parlitz, U. *et al.* Encoding messages using chaotic synchronization. Physical Review E, Vol.53, No.5, 1996, pp.4351-4361.
- [5] Zaher, A., A. Abu-Rezq. On the design of chaos-based secure communication systems. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat 16 (2011), pp.3721-3733.
- [6] Cho, K., T. Miyano. Chaotic cryptography using augmented Lorenz equations aided by quantum key distribution. IEEE Trans Circ Systems-I, Vol. 62, No 2, 2015, pp.478-487.
- [7] Wu, Q-Q, T. Li. Analysis, circuit implementation and synchronization of a new chaotic system. Proc. 33 Chinese Control Conference, July 28-30, 2014, Nanjing, China, pp. 6070-6073.
- [8] Zhang, X., Z. Li, D. Chang. Design, circuit implementation and synchronization on a new three dimensional fractional-order system. Int. J. Electron. Commun. 82 (2017), pp. 435-445.