

СИНХРОНИЗАЦИЯ МЕЖДУ ХАОТИЧНИ МОДЕЛИ НА WANG ПОСРЕДСТВОМ ВРЪЗКА ПО ЕДНА ПРОМЕНЛИВА

Драгомир Чантов¹

¹Технически университет - Габрово

SYNCHRONIZATION OF WANG CHAOTIC MODEL BY MEANS OF ONE- VARIABLE COUPLING

Dragomir Chantov¹

¹ Technical University of Gabrovo, Bulgaria

Abstract

In this paper chaotic synchronization schemes for two identical Wang chaotic systems are designed. The main purpose of the synchronization schemes is to achieve synchronization with the most economical coupling between the systems, namely with one variable only. For this purpose, different approaches are used. First, the most basic approach is to replace one of the variables of the slave system with the corresponding variable of the master system and to test the stability of the synchronization scheme by calculating the conditional Lyapunov exponents. If no synchronization can be achieved, additional feedback couplings with the same variable are added.

Keywords: chaotic systems; chaotic synchronization; feedback coupling; partial replacement.

ВЪВЕДЕНИЕ

Теорията на хаоса е специфична подобласт от теорията на управлението и по-конкретно от теорията на нелинейните системи, която използва свой понятиен апарат и в която се решават задачи, частично свързани с основните задачи за анализ и синтез от класическата теория на управлението. Една такава основна задача е тази за синхронизация между две или повече хаотични системи, която може да се реши по много различни начини и има много специфични особености [1,2].

Повечето методи за хаотична синхронизация разглеждат случая, при който една, най-често непрекъснатата, хаотична система участва в хаотичната синхронизационна схема в ролята на управляваща система и осигурява синхронизиращ сигнал за друга, идентична на нея система, наречена управлявана или подчинена система. Съществуват различни подходи за синтез на такива

синхронизационни схеми, като характерна особеност на тези задачи е, че няма универсален метод, който винаги да гарантира постигането на синхронизация между системите. Освен това, съществуват и различни подходи за анализа на устойчивостта на дадена синхронизационна схема, което свойство гарантира постигането на синхронизация.

Повечето известни методи за хаотична синхронизация предполагат синтезирането на сложни управляващи функции, подавани към подчинената хаотична система, които в общия случай могат да съдържат няколко или всички променливи на управляващата система, както и променливи от самата подчинена система [3]. В някои случаи това може да затрудни физическото реализиране на дадена синхронизационна схема, ако част от тези променливи не са постоянно или временно достъпни. В други случаи е нежелателно или неефективно подаването

на няколко сигнала/променливи по трасето за връзка между управляващата и подчинената системи.

В настоящия доклад се предлага реализирането на хаотични синхронизационни схеми между два хаотични модела на Wang, при които винаги връзката между системите е само по една променлива. Устойчивостта на всяка синхронизационна схема е изследвана посредством изчисляване на т.н. условни показатели на Ляпунов.

ИЗЛОЖЕНИЕ

Хаотичната система на Wang [4,5] представлява сравнително нов, типичен непрекъснат абстрактен хаотичен модел от трети ред. Уравненията на модела са:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ax_1 - ax_2 - x_2x_3, \\ \dot{x}_2 &= -bx_2 + x_1x_3, \\ \dot{x}_3 &= -cx_3 + dx_1 + x_1x_2, \end{aligned} \quad (1)$$

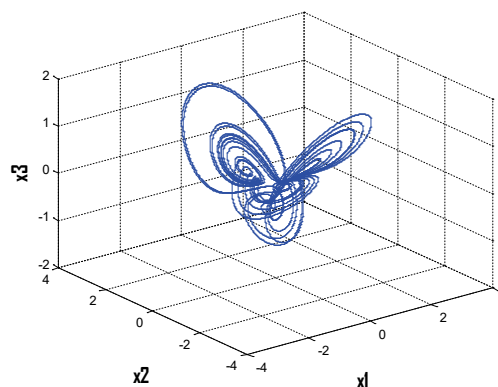
където номиналните стойности на параметрите са:

$$a = 1, b = 5.7, c = 5, d = 0.06. \quad (2)$$

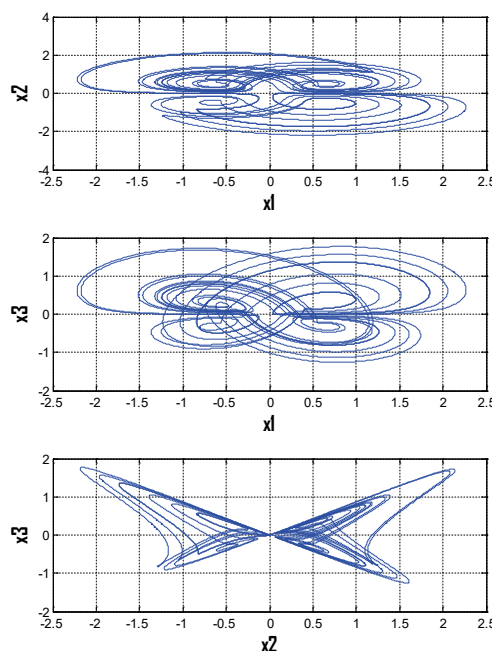
Моделът на Wang е симулиран с програмния продукт Matlab за произволно избрани начални условия:

$$\mathbf{x}(0) = [x_1(0) \quad x_2(0) \quad x_3(0)]^T = [1 \quad 0 \quad 0]^T \quad (3)$$

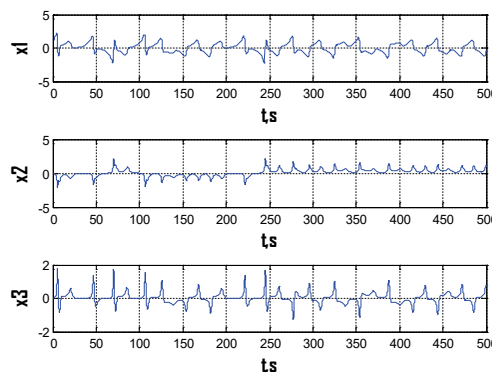
На фиг. 1 е показан хаотичният атрактор на модела в пространството на състоянието (x_1, x_2, x_3) . Атракторът е 4-секторен. Тази структура на атрактора се вижда по-добре при наблюдаване на проекциите на пространството на състоянието в трите фазови равнини (x_1, x_2) , (x_1, x_3) и (x_2, x_3) , показани на фиг. 2. На фиг. 3 са показани времевите характеристики на променливите на състоянието на модела на Wang, които имат типичния за хаотична система вид.



Фиг. 1. Хаотичен атрактор на модела на Wang



Фиг. 2. Проекция на хаотичния атрактор на модела на Wang в трите фазови равнини



Фиг. 3. Времеви характеристики на променливите на модела на Wang

Базовият вид на хаотична синхронизационна схема между два модела на Wang, първоначално без връзка между тях, може да се даде с уравненията:

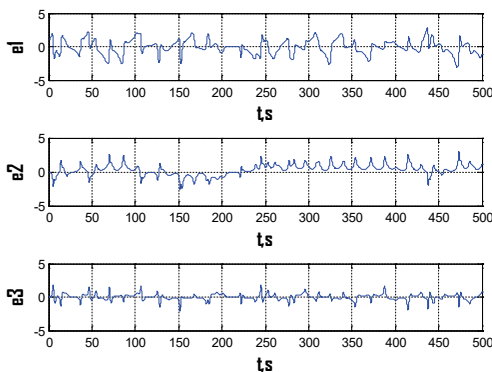
$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= ax_1 - ax_2 - x_2x_3, \\
 \text{Master} \quad \dot{x}_2 &= -bx_2 + x_1x_3, \\
 \dot{x}_3 &= -cx_3 + dx_1 + x_1x_2, \\
 & \quad (4) \\
 \dot{\tilde{x}}_1 &= a\tilde{x}_1 - a\tilde{x}_2 - \tilde{x}_2\tilde{x}_3, \\
 \text{Slave} \quad \dot{\tilde{x}}_2 &= -b\tilde{x}_2 + \tilde{x}_1\tilde{x}_3, \\
 \dot{\tilde{x}}_3 &= -c\tilde{x}_3 + d\tilde{x}_1 + \tilde{x}_1\tilde{x}_2,
 \end{aligned}$$

където с $\tilde{x}_i, i = 1 \div 3$ са означени променливите на втората система, която в следващите схеми ще бъде в ролята на подчинена (Slave) система, а първата система ще бъде в ролята на управляваща (Master) система.

Двата хаотични модела в схемата (4) са идентични модели на Wang, с еднакви стойности на всички параметри, които са стойностите от (2). Въпреки, че в схемата (4) има два идентични хаотични модела, ако те се стартират от различни начални условия, динамиката им няма да бъде корелирана по никакъв начин, въпреки, че и двете инстанции на модела на Wang ще се движат по хаотичния атрактор от фиг. 1. За илюстриране на това интересно и присъщо на хаотичните системи явление са получени функциите на разсъгласуване или грешките между отделните двойки променливи в двете системи на Wang;

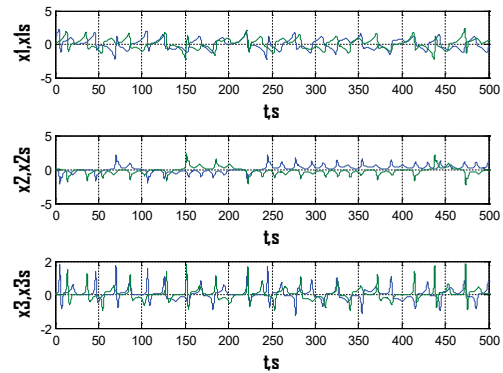
$$e_i = x_i - \tilde{x}_i, i = 1 \div 3, \quad (5)$$

които са показани на фиг. 4



Фиг. 4. Функции на разсъгласуване при липса на връзка между двата модела на Wang

Вижда се, че динамиката на тези функции сама по себе си също е хаотична. На фиг. 5 е показана динамиката на двойките променливи $(x_1, \tilde{x}_1), (x_2, \tilde{x}_2)$ и (x_3, \tilde{x}_3) . Фигурата потвърждава индивидуалното и независимо движение на двете системи по хаотичния им атрактор.



Фиг. 5. Съвместна динамика на отделните двойки променливи при липса на връзка

Съществуват различни подходи за реализиране на управление към Slave системата в схемата (4) с цел синхронизация между системите. Най-общо, ще се приема, че системите в (4) са идентично синхронизирани, ако за дадено управление е изпълнено условието:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_i(t) = 0, i = 1 \div 3. \quad (6)$$

Няма универсален метод за постигане на синхронизация. При повечето методи към уравненията на Slave системата се добавят сложни управляващи функции, които в общия случай могат да съдържат всички променливи както от Master системата, така и от самата Slave система. Не винаги този подход е удачен, понякога е желателно връзката между двете хаотични системи да е максимално „икономична“.

Нека се модифицира схемата (4), като в Slave системата една от променливите, само на една позиция, да бъде заместена от съответната променлива от Master системата. Например като първи вариант на този подход, наречен частично заместване [6], променливата x_1 ще замести променливата \tilde{x}_1 само в първото уравнение на Slave системата, като това съответства на подаване-

то на управляващ сигнал. Тогава Slave системата добива вида:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= a\underline{x}_1 - a\tilde{x}_2 - \tilde{x}_2\tilde{x}_3, \\ \text{Slave } \dot{\tilde{x}}_2 &= -b\tilde{x}_2 + \tilde{x}_1\tilde{x}_3, \\ \dot{\tilde{x}}_3 &= -c\tilde{x}_3 + d\tilde{x}_1 + \tilde{x}_1\tilde{x}_2. \end{aligned} \quad (7)$$

По такъв начин между двата хаотични модела вече има връзка, но това само по себе си не гарантира получаването на синхронизация между тях. Условието за синхронизация се свежда до анализ на устойчивостта на точката $\mathbf{e} = [e_1 \ e_2 \ e_3]^T = \mathbf{0}$, която е центърът на координатната система, осите на която са функциите (5). Ако линеаризираната в тази точка система от разсъгласуването между Master и Slave системите е устойчива, то ще бъде изпълнено условието за синхронизация (6). Тази система се получава при изваждане на уравненията на Slave системата (7) от тези на Master системата от (4) и отчитане, че $e_i = x_i - \tilde{x}_i$ и $\dot{e}_i = \dot{x}_i - \dot{\tilde{x}}_i$:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= -ae_2 - x_2x_3 + \tilde{x}_2\tilde{x}_3, \\ \dot{e}_2 &= -be_2 + x_1x_3 - \tilde{x}_1\tilde{x}_3, \\ \dot{e}_3 &= -ce_3 + de_1 + x_1x_2 - \tilde{x}_1\tilde{x}_2. \end{aligned} \quad (8)$$

В уравненията (8) може да се направи заместването $\tilde{x}_i = x_i - e_i$, което следва от (5), при което, след извършване на съответните действия по умножение, системата от разсъгласуването ще добие вида:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= -ae_2 - e_2x_3 - e_3x_2 + e_2e_3, \\ \dot{e}_2 &= -be_2 + e_1x_3 + e_3x_1 - e_1e_3, \\ \dot{e}_3 &= -ce_3 + de_1 + e_1x_2 + e_2x_1 - e_1e_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Якубианът на системата (9) е:

$$\mathbf{J}_x = \begin{bmatrix} 0 & -a - x_3 + e_3 & -x_2 + e_2 \\ x_3 - e_3 & -b & x_1 - e_1 \\ d - e_2 & x_1 - e_1 & -c \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Линеаризацията на системата (8) в т. $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ съответства на заместването на $e_i = 0$

в Якубиана (10). Ако собствените стойности на \mathbf{J}_x са в лявата полуравнина на комплексната равнина, то синхронизационната схема ще е устойчива и ще се изпълнява необходимото условие за синхронизация. Наличието на променливите x_i в (10) възпрепятства точното изчисляване на собствените стойности на \mathbf{J}_x . Възприета е методика, при която тези променливи се заместват с техните математически очаквания за достатъчно голям времеви диапазон. Реалните части на изчислените след това приближение собствени стойности на \mathbf{J}_x се наричат условни показатели на Ляпунов.

С помощта на продукта Matlab са изчислени математическите очаквания на променливите на системата на Wang за период от 500s, който е съобразен с динамиката на системата, представена на фиг. 3:

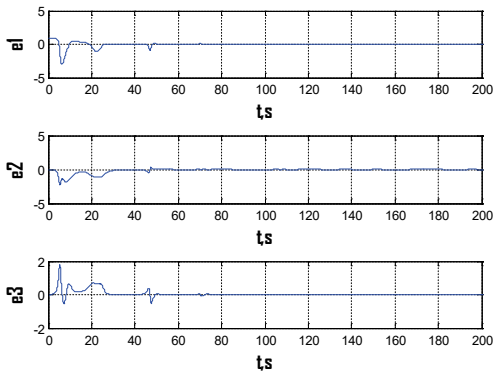
$$\bar{x}_1 = 0.0053, \bar{x}_2 = 0.0998, \bar{x}_3 = 0.0295. \quad (11)$$

След заместване на (11) в (10) и отчитане, че $e_i = 0$, за собствените стойности на \mathbf{J}_x в т. $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ се получава:

$$\lambda_1 = -0.0065, \lambda_2 = -5.6948, \lambda_3 = -4.9987. \quad (12)$$

Собствените стойности (12) са отрицателни, от което следва, че синхронизационната схема ще е устойчива. Тъй като стойностите (12) са реални, те съвпадат и с условните показатели на Ляпунов за тази схема. На фиг. 6 са показани получените при симулацията функции на разсъгласуване $e_i = x_i - \tilde{x}_i$. След преходен процес от около 50s хаотичните системи се синхронизират идентично, тъй като се изпълнява условието за синхронизация (6).

Реализацията на предходната синхронизационна схема е с възможно „най-икономична“ връзка – само една променлива от Master системата участва само на една позиция в уравненията на Slave системата. Практиката показва, че често пъти подобни схеми с частично заместване не водят до синхронизация. Освен това липсва възможност за допълнителна настройка, например с коефициент, който да регулира продължителността на преходния процес.



Фиг. 6. Функции на разсъгласуване при Slave система (7)

За да има повече възможности за настройка на синхронизационната схема се предлага добавяне на вторичен управляващ сигнал към Slave системата със същата управляваща променлива от Master системата. Вторичният сигнал се генерира на принципа на известния метод за синхронизация с обратна връзка [7] и за разглеждания вариант на връзка само по променливата x_1 Slave системата (7) може да се модифицира например във вида:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= a\underline{x}_1 - a\tilde{x}_2 - \tilde{x}_2\tilde{x}_3 + \alpha(x_1 - \tilde{x}_1), \\ \text{Slave} \quad \dot{\tilde{x}}_2 &= -b\tilde{x}_2 + \tilde{x}_1\tilde{x}_3, \\ \dot{\tilde{x}}_3 &= -c\tilde{x}_3 + d\tilde{x}_1 + \tilde{x}_1\tilde{x}_2, \end{aligned} \quad (13)$$

където α е коефициент на вторичната връзка, който може да се избере експериментално при симулацията.

Якубианът на системата от разсъгласуването за новата Slave система (13) е:

$$\mathbf{J}_x = \begin{bmatrix} -\alpha & -a - x_3 + e_3 & -x_2 + e_2 \\ x_3 - e_3 & -b & x_1 - e_1 \\ d - e_2 & x_1 - e_1 & -c \end{bmatrix}, \quad (14)$$

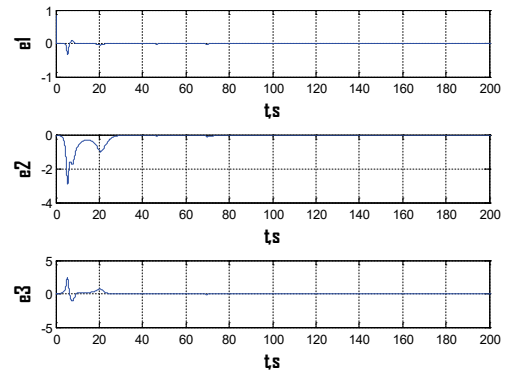
при което след заместване на (11) в (14) и отчитане, че $e_i = 0$, за собствените стойности на \mathbf{J}_x в т. $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ за $\alpha = 10$ се получава:

$$\lambda_1 = -5.0012, \lambda_2 = -5.707, \lambda_3 = -9.9917, \quad (15)$$

т.е. отново се изпълнява условието за синхронизация. При това числата (15) са по-

отдалечени от ординатната ос на комплексната равнина спрямо тези от (12), което предполага по-бърза синхронизация.

На фиг. 7 са показани получените функции на разсъгласуване $e_i = x_i - \tilde{x}_i$ за модификацията на синхронизационната схема със Slave системата (14). Вижда се, че системите се синхронизират, при това по-бързо спрямо предишния вариант от фиг. 6.



Фиг. 7. Функции на разсъгласуване при Slave система (13)

Друг вариант за първична връзка по променливата x_1 по метода на частично заместване между системите от синхронизационната схема е със следната Slave система:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= a\tilde{x}_1 - a\tilde{x}_2 - \tilde{x}_2\tilde{x}_3, \\ \text{Slave} \quad \dot{\tilde{x}}_2 &= -b\tilde{x}_2 + \tilde{x}_1\tilde{x}_3, \\ \dot{\tilde{x}}_3 &= -c\tilde{x}_3 + d\underline{x}_1 + \tilde{x}_1\tilde{x}_2, \end{aligned} \quad (16)$$

при който управляващият сигнал е в третото уравнение.

При този случай след получаване на системата от разсъгласуването и линеаризирането ѝ по начин, аналогичен на този от предишния вариант, се получава следния Якубиан:

$$\mathbf{J}_x = \begin{bmatrix} a & -a - x_3 + e_3 & -x_2 + e_2 \\ x_3 - e_3 & -b & x_1 - e_1 \\ -e_2 & x_1 - e_1 & -c \end{bmatrix}, \quad (17)$$

за собствените стойности на който в т. $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ при прилагане на същия алгоритъм с осреднените стойности (11) се получава:

$$\lambda_1 = 0.0095, \lambda_2 = -5.6955, \lambda_3 = -5. \quad (18)$$

Наличието на положителна собствена стойност показва, че синхронизация между Master и Slave системите при тази връзка няма да се получи, което се потвърждава и от направената симулация. Функциите на разсъгласуване са подобни на тези от фиг. 4, когато няма връзка между системите.

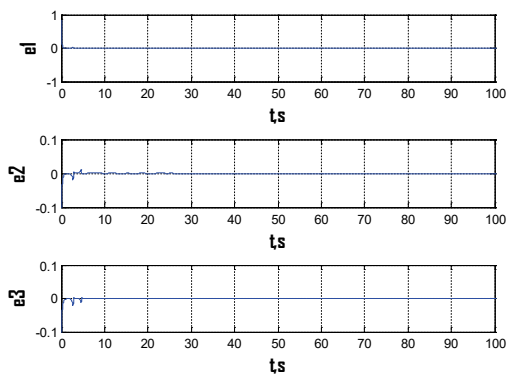
Към Slave системата (16) също може да се добави вторичен управляващ сигнал със същата управляваща променлива от Master системата, аналогично на (13):

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= a\tilde{x}_1 - a\tilde{x}_2 - \tilde{x}_2\tilde{x}_3 + \alpha(x_1 - \tilde{x}_1), \\ \text{Slave} \quad \dot{\tilde{x}}_2 &= -b\tilde{x}_2 + \tilde{x}_1\tilde{x}_3, \\ \dot{\tilde{x}}_3 &= -c\tilde{x}_3 + d\underline{x}_1 + \tilde{x}_1\tilde{x}_2. \end{aligned} \quad (19)$$

В този случай за собствените стойности на \mathbf{J}_x в т. $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ за $\alpha = 10$ се получава:

$$\lambda_1 = -5, \lambda_2 = -5.7093, \lambda_3 = -8.9908. \quad (20)$$

На фиг. 8 са показани получените при симулацията на схемата функции $e_i = x_i - \tilde{x}_i$, които потвърждават наличието на идентична синхронизация.



Фиг. 8. Функции на разсъгласуване при Slave система (19)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Синтезирани са хаотични синхронизационни схеми на основата на сравнително нов

и по-слабо известен хаотичен модел от трети ред. Основната цел е да се получи идентична синхронизация между две системи на Wang, свързани в конфигурация Master-Slave с възможно най-облекчена връзка между тях. Предложен е подход, при който връзката е само по една променлива. За по-голяма гъвкавост и тестване на повече варианти на връзката се предлага съчетаване на управляващ сигнал от тип частично заместване с такъв, синтезиран на принципа на обратната връзка. Този подход дава възможност за реализиране на множество схеми на връзка само по една променлива, което увеличава възможностите за намиране на устойчив вариант и за регулиране на продължителността на преходния процес. Подобни схеми могат да се реализират с връзка по някоя от останалите две променливи на хаотичната система.

REFERENCE

- [1] Pecora, L., T. Carroll. Synchronization in chaotic systems. Physical Review Letters, Vol.64, No.8, 1990, pp.821-824.
- [2] Carroll, T., L. Pecora. Synchronizing chaotic circuits. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I, Vol.38, No.4, 1991, pp.453-456.
- [3] Boccaletti, S., C. Grebogi, "The control of chaos: theory and applications", Physics Reports, vol. 329, 2000, pp.103-197.
- [4] Karthikeyan, R., V. Sundarapandian. Hybrid synchronization of four-scroll systems via active control. J. Electrical Engineering, Vo. 65, No. 2, 2014, pp.97-103.
- [5] Wang, L. 3-scroll and 4-scroll chaotic attractors generated from a new 3-D quadratic autonomous system. Nonlinear Dynamics 56 (2009), pp.453-462.
- [6] Pecora, L., T. Carroll, G. Johnson, D. Mar, J. Heagy, Fundamentals of synchronization in chaotic systems, concepts, and applications, Chaos 7(4), 1997, pp.520-543.
- [7] Boccaletti, S., J. Kurths, G. Osipov, D. Valladares, C. Zhou, The synchronization of chaotic systems, Physics Reports 366 (2002), pp.1-101.